Neki načini dokazivanja identiteta s Fibonaccijevim brojevima

Džana Drino, Merima Murica[1]

U ovom radu ćemo dati nekoliko uobičajenih načina dokazivanja identiteta s Fibonaccijevim brojevima (korištenjem principa matematičke indukcije, rekurzivne relacije, Cauchy-Binetove formule, teleskopiranjem), te nekoliko primjera kombinatornih dokaza, koji se odnose na popločavanje ploče dominama i kvadratima.

Uvod

Fibonaccijev niz rekurzivno se definira sa: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za $n > 2$. Svaki član u nizu je jedenak zbroju prethodna dva člana, a iz rekurzivne relacije za F_2 dobivamo vrijednost za F_0 : $F_0 = F_2 - F_1 = 1 - 1 = 0$.

Osim rekurzivno, Fibonaccijevi brojevi mogu se eksplicitno izraziti pomoću Cauchy-Binetove formule [2, str. 15]:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

gdje su $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ rješenja jednadžbe $x^2 - x - 1 = 0$. Primijetimo da vrijedi: $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, $\alpha \cdot \beta = -1$ (ove činjenice će nam trebati u dokazima identiteta).

Identiteti

Do sada je otkriven veliki broj identiteta koji vrijede za Fibonaccijeve brojeve. Ovdje dajemo nekoliko načina njihovog dokazivanja. Sljedeća dva identiteta [2, str. 13, 22] ćemo dokazati primjenom Cauchy-Binetove formule i teleskopiranjem.

Identitet 1. Za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k = F_{3n}.$$

Dokaz. Uvrštavanjem vrijednosti F_n iz Cauchy-Binetove formule i primjenom binomnog teorema, lijeva strana jednakosti postaje:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \cdot \frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \alpha^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \beta^k \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}((1+2\alpha)^n - (1+2\beta)^n)\end{aligned}$$

[1] Studentice Odsjeka za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Sarajevu.

Kako vrijedi: $\alpha^2 = 1+\alpha$, $1+2\alpha = \alpha^3$, $1+2\beta = \beta^3$, slijedi:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{3n} - \beta^{3n}) = F_{3n}.$$

Identitet 2. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} = 3 - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}.$$

Dokaz. Da bismo izračunali sumu na lijevoj strani, prvo ćemo dokazati tvrdnju: *Za paran prirodan broj m vrijedi:*

$$\frac{1}{F_{2m}} = \frac{F_{m-1}}{F_m} - \frac{F_{2m-1}}{F_{2m}}.$$

Dokaz tvrdnje.

$$\frac{1}{F_{2m}} = \frac{F_{m-1}}{F_m} - \frac{F_{2m-1}}{F_{2m}} \iff F_m = F_{m-1}F_{2m} - F_mF_{2m-1}.$$

Korištenjem Cauchy-Binetove formule i činjenica $\alpha - \beta = \sqrt{5}$, $\alpha\beta = -1$, imamo:

$$\begin{aligned}
F_{m-1}F_{2m} - F_mF_{2m-1} &= \frac{1}{5}((\alpha^{m-1} - \beta^{m-1})(\alpha^{2m} - \beta^{2m}) - (\alpha^m - \beta^m)(\alpha^{2m-1} - \beta^{2m-1}))\\
&= \frac{1}{5}(\alpha^{m-1}\beta^{2m-1}(\alpha - \beta) - \beta^{m-1}\alpha^{2m-1}(\alpha - \beta))\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{m-1}\beta^{2m-1} - \beta^{m-1}\alpha^{2m-1})\\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha^{m-1}\beta^{m-1}(\beta^m - \alpha^m) = -F_m(\alpha\beta)^{m-1} = F_m.
\end{aligned}$$

Time je pomoćna tvrdnja dokazana. Sada je jednostavno izračunati traženu sumu korištenjem ove tvrdnje i *teleskopiranjem*:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} &= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \left(\frac{F_1}{F_2} - \frac{F_3}{F_4}\right) + \ldots + \left(\frac{F_{2^{n-2}-1}}{F_{2^{n-2}}} - \frac{F_{2^{n-1}-1}}{F_{2^{n-1}}}\right) + \left(\frac{F_{2^{n-1}-1}}{F_{2^{n-1}}} - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}\right)\\
&= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{F_1}{F_2} - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}} = 3 - \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}}.
\end{aligned}$$

Napomena. Kad $n \to \infty$ dobivamo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2^k}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{F_{2^k}} = 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n}} = 3 - (-\beta) = 3 + \beta.$$

Sada ćemo dati i jedan primjer dokazivanja matematičkom indukcijom:

Identitet 3. Za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ vrijedi

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} = F_{n+1}.$$

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti jaku formu principa matematičke indukcije:

i) Za $n = 0$ i $n = 1$ tvrdnja vrijedi jer je $F_1 = 1 = \binom{0}{0}$ i $F_2 = 1 = \binom{1}{0}$.

ii) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve brojeve $k \leq n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k-i}{i} = F_{k+1}, \quad k \leq n.$$

iii) Dokažimo da vrijedi i za $n+1$. Na osnovu Pascalovog identiteta za binomne koeficijente [3, str. 152] imamo:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-i}{i} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i-1} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i}.$$

Pretpostavimo da je n paran. Tada je $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor = \dfrac{n}{2}$ i $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor$, pa je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-i}{i} &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-i}{i-1} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-i}{i} \\
&= \sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n-(j+1)}{j} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-i}{i} \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{(n-1)-j}{j} + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} \\
&\qquad \text{(sada primjenjujemo induktivnu pretpostavku)} \\
&= F_n + F_{n+1} = F_{n+2}.
\end{aligned}$$

Na sličan način se pokaže da identitet vrijedi i ako je n neparan broj.

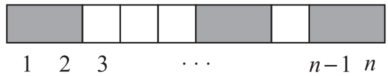
$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-i}{i} = F_{n+2}.$$

iv) Na osnovu principa matematičke indukcije zaključujemo da identitet vrijedi za sve $n \geq 0$.

Napomena. Primijetimo da nam ovaj identitet daje vezu Fibonaccijevih brojeva s Pascalovim trokutom: suma brojeva na n-toj "dijagonali" u Pascalovom trokutu jednaka je n-tom Fibonaccijevom broju.

Kombinatorni dokazi

Identiteti s Fibonaccijevim brojevima mogu se dokazivati i kombinatornim putem. U tu svrhu promatrat ćemo skup svih popločavanja ploče dimenzije $1 \times n$ pomoću domina (veličine 1×2) i kvadrata (veličine 1×1). Ćelije ploče označit ćemo s $1, 2, \ldots, n$. Prebrojit ćemo koliko je popločavanja na dva načina, tako da jedan od njih predstavlja kombinatornu interpretaciju lijeve, a drugi interpretaciju desne strane jednakosti koju dokazujemo. Kako obje strane predstavljaju prebrojavanje istog skupa, one moraju biti jednake.



Sljedeći teorem [1, str. 1] nam daje vezu Fibonaccijevih brojeva s brojem načina da pokrijemo ploču dominama i kvadratima.

Teorem 1. *Neka je f_n broj načina da se poploča ploča dužine n kvadratima i dominama. Tada je f_n Fibonaccijev broj i za $n \geq 0$ vrijedi: $f_n = F_{n+1}$.*

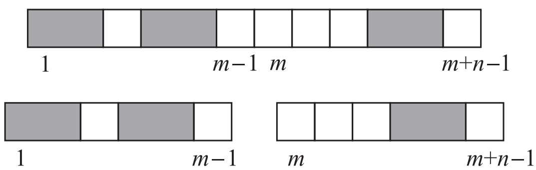
Dokaz. Definirajmo $f_0 = F_1 = 1$ broj popločavanja ploče dužine 0. Dalje, ploču dužine 1 možemo popločati samo na jedan način (jednim kvadratom), pa je $f_1 = 1 = F_2$. Ako imamo ploču dužine n, njenu posljednju ćeliju možemo pokriti ili s kvadratom ili s dominom. U prvom slučaju postoji f_{n-1} načina da se pokrije prvih $n-1$ ćelija ploče, dok u drugom slučaju ostaje f_{n-2} načina da se pokrije prvih $n-2$ ćelije. Odatle je ukupan broj popločavanja cijele ploče: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Kako niz $\{f_n\}$ zadovoljava iste početne uvjete i rekurziju kao niz $\{F_n\}$, slijedi $f_n = F_{n+1}$, za sve $n \geq 0$.

Identitet 4. Za m, $n \geq 0$ vrijedi

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}.$$

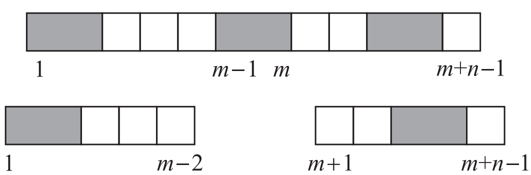
Dokaz. Dokazat ćemo tvrdnju [1, str. 4]: $f_{m+n-1} = f_{m-2}f_{n-1} + f_{m-1}f_n$. Broj načina na koje možemo popločati ploču dužine $(m+n-1)$ jednak je f_{m+n-1}. Odredimo sada broj popločavanja na drugi način, tako što ćemo razmatrati dva slučaja:

Prvi slučaj. Ako se ploča dužine $m+n-1$ može razdvojiti na ćeliji $m-1$, onda je ona nastala spajanjem dvije ploče: jedne koja ima $m-1$ ćelija i druge koja sadrži n ćelija. Ploče smo popločavali nezavisno jednu od druge, pa ukupno postoji $f_{m-1} \cdot f_n$ popločavanja.



Drugi slučaj. Ako se ploča ne može razdvojiti na ćeliji $m-1$, onda mora sadržavati dominu koja pokriva ćelije $m-1$ i m (kao što vidimo na slici ispod).

Prvi dio ploče (koji sadrži prve $m-2$ ćelije) se može popločati na f_{m-2} načina, a drugi dio ploče (poslije ćelije m) na f_{n-1} načina, što nam daje ukupno $f_{m-2}f_{n-1}$ popločavanja. Kako je svako popločavanje ili razdvojivo ili nerazdvojivo na ćeliji $m-1$, ukupan broj popločavanja je jednak $f_{m-1}f_n + f_{m-2}f_{n-1}$. Odatle je $f_{m+n-1} = f_{m-2}f_{n-1} + f_{m-1}f_n$.



Navest ćemo još *dvije posljedice* ovog identiteta:

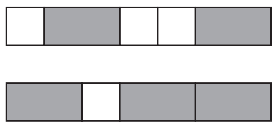
i) $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$

ii) $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$.

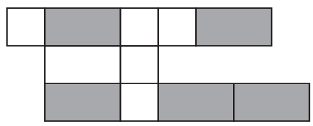
Prvu dobijemo uvrštavanjem $m = n$ u identitet 4, a drugu za $m = n + 1$.

Parovi ploča

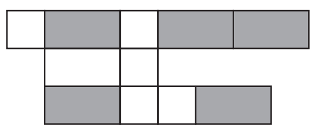
Promatrajmo par ploča dužine n na slici ispod. Broj načina na koje ih možemo popločati je ${f_n}^2$.



Pomaknimo donju ploču za jedno mjesto udesno. Kažemo da postoji "greška" na mjestu i ako se gornja ploča može razdvojiti na mjestu i, a donja na $i-1$, bez lomljenja pločica. Npr. sljedeći par ima greške na mjestima 1, 3 i 4:



Zamijenimo sada "repove" ploča tj. dijelove iza posljednje greške. Dobijamo ploče sa greškama na istim mjestima kao na početku, s tim da gornja ploča sad ima $n + 1$, a donja $n - 1$ mjesta. Ukupan broj popločavanja je $f_{n+1}f_{n-1}$.



Ako bar jedna ploča ima kvadrat, greška sigurno postoji. Npr. ako prva ploča ima kvadrat koji pokriva ćeliju i, onda se ona može razdvojiti na mjestima i ili $i - 1$. Ako se druga ploča ne može razdvojiti na mjestu i, onda postoji domina koja pokriva i i $i+1$, ali je greška tada sigurno na mjestu $i-1$. U suprotnom, ako se druga ploča može razdvojiti na mjestu i, onda je na tom mjestu greška. Greške se mogu izbjeći samo na jedan način: popločavanjem obje ploče dominama.

Koristeći ovo, dokazat ćemo Cassinijev identitet [1, str. 8].

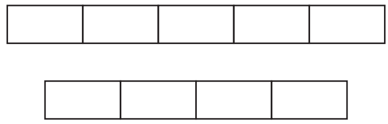
Identitet 5. Za $n \geq 0$ vrijedi

$$ {f_n}^2 = f_{n+1}f_{n-1} + (-1)^n. $$

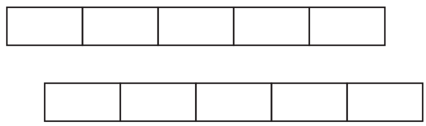
Dokaz. Neka je X skup svih popločavanja dvije ploče dužine n. Tada je $|X| = {f_n}^2$. Neka je Y skup popločavanja ploče dužine $n+1$ i ploče dužine $n-1$, $|Y| = f_{n+1}f_{n-1}$.

Pretpostavimo prvo da je n neparan broj. Tada obje ploče moraju imati najmanje jedan kvadrat, pa greška sigurno postoji. Zamjenom repova ploča, dobivamo ploče s $n+1$ i $n-1$ ćelija, s greškama na istim mjestima kao u početnom rasporedu. Time smo dobili bijekciju između svih parova popločavanja ploča dužine n i parova popločavanja ploča dužina $n+1$ i $n-1$, pod uvjetom da ta popločavanja imaju bar jednu grešku.

Međutim, kako je n neparan, $n+1$ i $n-1$ su parni i može se desiti da u paru ploča dužina $n+1$ i $n-1$ nema nijedna greška. Taj par nećemo brojati, pa u slučaju neparnog n vrijedi: ${f_n}^2 = f_{n+1}f_{n-1} - 1$.



Ako je n paran broj, kao i u prethodnom slučaju, postoji bijektivno preslikavanje između parova ploča koji imaju greške. Razlika u odnosu na prošli slučaj je što je sada jedini par popločavanja koji nema greški onaj u kojem su obje ploče dužine n i pokrivene svim dominama. Zato za parno n vrijedi: ${f_n}^2 = f_{n+1}f_{n-1} + 1$.



Zaključak

Identiteti s Fibonaccijevim brojevima se mogu dokazivati na različite načine. Većina njih se dokazuje matematičkom indukcijom, teleskopiranjem, primjenom rekurzivne ili Cauchy-Binetove formule. Nekoliko identiteta smo dokazali tim metodama (u svakom smo koristili drukčiji način radi raznolikosti ideja), a osim toga, naveli smo i nekoliko primjera kombinatornih dokaza. Oni predstavljaju zanimljiv način dokazivanja, s tim da za veliki broj identiteta nije jednostavno naći kombinatornu intepretaciju. Mogu se koristiti različite ideje: razmatrati različite položaje određene domine ili kvadrate, tražiti korespondencije između skupova popločavanja, promatrati parove ploča... Čitatelj može pokušati naći kombinatorni dokaz identiteta 3, koji smo ovdje dokazali matematičkom indukcijom, i to promatranjem popločavanja ploče dužine n, koja sadrže točno i domina, $i \in \left\{0, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$ (vidi [1, str. 4]).

Literatura

[1] A. T. BENJAMIN, J. J. QUINN, *Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof*, The Dolciani Mathematical Expositions, 27, Mathematical Association of America, Washington, 2003.

[2] A. DUJELLA, *Fibonaccijevi brojevi*, Hrvatsko matematičko društvo, Matkina biblioteka, Zagreb, 2000.

[3] T. KOSHY, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 2001.